π PARTOUT

Deux niveaux de difficulté/longueur : — Piste bleue : partie **1**. — Piste rouge : tout le devoir.

1 Wallis, Euler, Gauss

On pose $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons rencontré ces intégrales dites *de Wallis* en TD, qui tirent leur nom du mathématicien anglais John Wallis (1616-1703). La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose par ailleurs $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que : $\dfrac{w_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)u_n - (2n+2)u_{n+1}$.

b) En déduire, au moyen d'un télescopage, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2u_n}{w_{2n}}$.

2) a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$.

b) En déduire que $0 \leqslant \dfrac{u_n}{w_{2n}} \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On connaît de multiples preuves de cette égalité, mais c'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui l'a prouvée le premier.

3) a) Montrer que la suite $\big((n+1)w_n w_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} w_n$.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$: $\left(1 - \dfrac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

c) En déduire, en posant $t = n\sin u$ d'une part et $t = n\tan u$ d'autre part, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n w_{2n^2+1} \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant n w_{2n^2-2}.$$

d) En déduire proprement que $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis enfin que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Attention, n est un entier dans la première limite et x un réel dans la seconde.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ est appelée l'*intégrale de Gauss*, du nom du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

2 Dirichlet

4) a) On appelle *fonction cotangente* et on note cotan la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$. Quel est son ensemble de définition ? Sur quel ensemble coïncide-t-elle avec la fonction tangente ?

b) Montrer que les fonctions $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin^2(2nx)}{x^2}$, $x \longmapsto \operatorname{cotan}^2 x \sin^2(nx)$ et $x \longmapsto \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}$ sont prolongeables par continuité en 0.

Ce résultat garantit pour tous $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$ la bonne définition des intégrales :

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t, \qquad m_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotan}^2 t \sin^2(nt) \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad M_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Ces intégrales posent en apparence un problème de définition autour de la borne 0, mais quand on dit par exemple qu'on intègre la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[0, x]$, c'est en fait son prolongement par continuité qu'on intègre.

5) a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a^+]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\displaystyle I(2n\pi) = \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2nt)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On intégrera d'abord par parties sur $\left[\varepsilon, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Pourquoi pas sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tout entier ?

6) a) Simplifier $M_{n+2} - 2M_{n+1} + M_n$ et $M_n - m_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\displaystyle \operatorname{cotan} t \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sin t}$ pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) En déduire que $\displaystyle I(2n\pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$, puis que $\displaystyle I(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ est appelée l'*intégrale de Dirichlet*, du nom du mathématicien allemand Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).